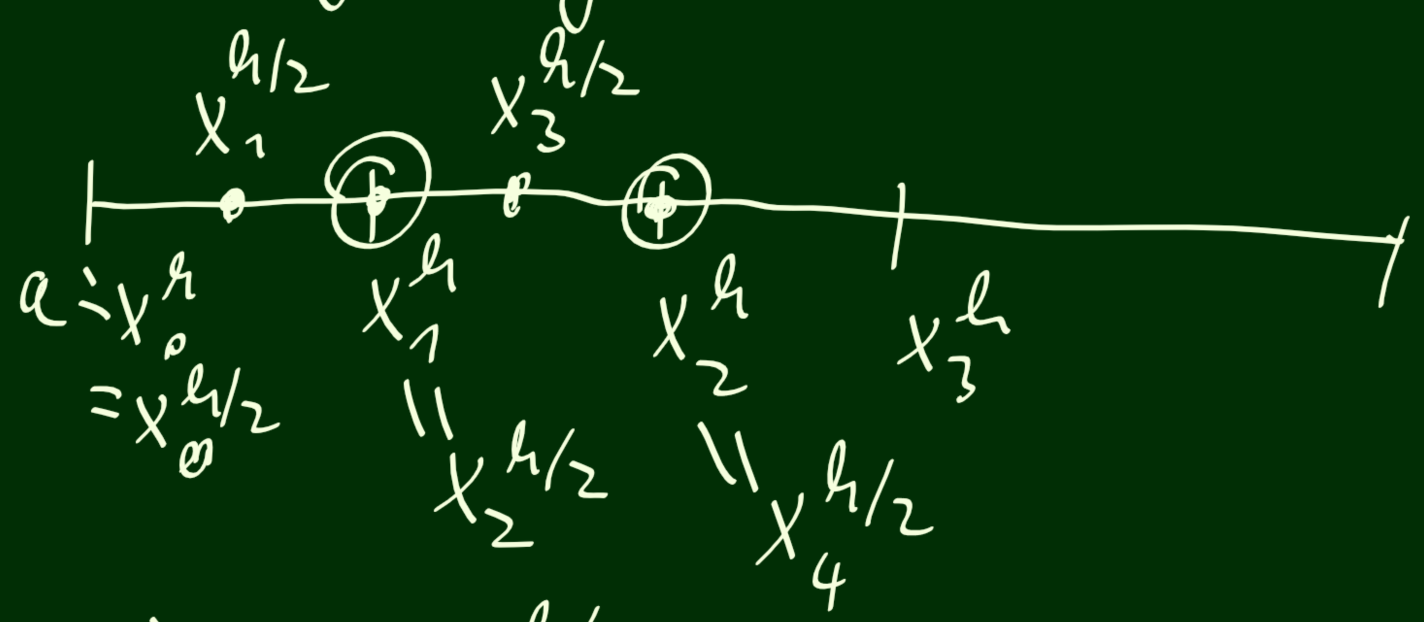
Metoda polovičního kroku: $x_n^h,\ x_n^{h/2}\ \ldots\ y_n^h,\ y_n^{h/2}$



$$\left.\begin{aligned} y(x_n^h) - y_n^h &\approx K h^p \\ y(x_{2n}^{h/2}) - y_{2n}^{h/2} &\approx K\left(\frac{h}{2}\right)^p \end{aligned}\right\} -$$

$$y_{2n}^{h/2} - y_n^h \approx K\left(\frac{h}{2}\right)^p (2^p - 1) \Rightarrow K\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{y_{2n}^{h/2} - y_n^h}{2^p - 1} \approx y(x_{2n}^{h/2}) - y_{2n}^{h/2}$$

Vícekrokové metody: R-K dosahly vyšší přesnosti vyhodnocením f ve více bodech

- zbytečná práce ???
- využít již napočítané ???

k-kroková metoda využije k předchozích hodnot y_i.

Př: $y' = f(x,y) \;\Big|\; \int_{x_n}^{x_{n+2}} dx \;\Rightarrow\; \underbrace{y(x_{n+2})}_{\substack{\approx \\ y_{n+2}}} - \underbrace{y(x_n)}_{\substack{\approx \\ y_n}} = \underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x,y(x))\,dx}_{\approx \frac{1}{3}h\left[f(x_n,y_n)+4f(x_{n+1},y_{n+1}) + f(x_{n+2},y_{n+2})\right]}$ ← Simpsonovo pravidlo

$\Rightarrow$ metoda: $\boxed{y_{n+2}-y_n = \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right]}$, $f_n = f(x_n,y_n)$

- 2. řád, implicitní, 2-kroková metoda

Def: **k-kroková metoda**: $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$, kde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ - koeficienty, $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. ($f_{n+i} = f(x_{n+i}, y_{n+i})$)

- y_0 dáno, $y_1, \dots, y_{k-1}$ spočtu např. vhodnou JKM, R-K.

VKM (vícekrokové metody):
- **explicitní**, $\beta_k = 0$
- **implicitní**, $\beta_k \neq 0$ ... řeším nelin. problém pro y_{n+k} (Newton)

Jak řešit implicitní problém:

$$y_{n+k} = \frac{\beta_k}{\alpha_k} h f(x_{n+k}, y_{n+k}) + \frac{1}{\alpha_k}\left[h\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i f_{n+i} - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}\right] =: G(y_{n+k})$$

Algoritmus: Zvol $y_{n+k}^{(0)}$ počáteční odhad, iteruj $y_{n+k}^{(l+1)} = G(y_{n+k}^{(l)})$

Věta: Nechť h dost. malé $\Rightarrow$ G kontrakce $\Rightarrow$ pro lib. $y_{n+k}^{(0)}$ platí $y_{n+k}^{(l)} \to y_{n+k}$ (hledané řešení VKM) pro $l \to \infty$.

Dk: $|G(y) - G(\tilde{y})| = \left|\frac{\beta_k}{\alpha_k} h f(x_{n+k}, y) - \frac{\beta_k}{\alpha_k} h f(x_{n+k}, \tilde{y})\right| \le \underbrace{\left|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right| h L}_{<1 \text{, pro } h < \left|\frac{\alpha_k}{L\beta_k}\right|} |y - \tilde{y}|$

V praxi stačí 2, 3, 4 ... málo iterací.

Pozn.:
- Čím menší h, tím rychlejší konvergence.
- $y^{(0)}_{n+k}$ získám explicitní metodou (prediktor), implicitní metoda (korektor)
- prediktor-korektor

Konstrukce: Adams – Bashforth – explicitní

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \text{ODR}\, dx \Rightarrow \underbrace{y(x_{n+1})}_{\approx y_{n+1}} - \underbrace{y(x_n)}_{\approx y_n} = \underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx}$$

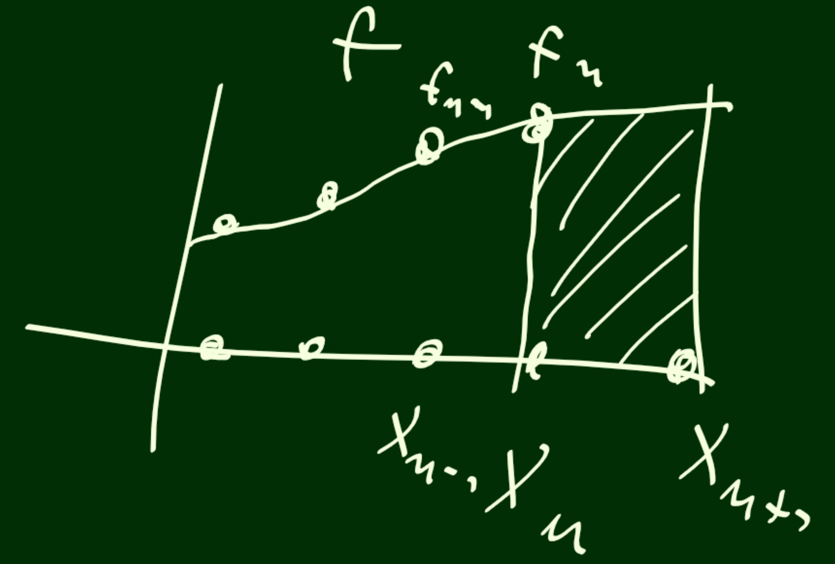
≈ interpoluji f v uzlech $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$ polynomem st. $\cancel{x}$ $k-1$, $\int_{x_n}^{x_{n+1}}$

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i f_{n-i}, \quad a_i = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x_n - x_{n-j}}{x_{n-i} - x_{n-j}}\, dx$$

Pro $k=1$: Euler.

$k=2$: $y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1}\right)$

$k=3$: —//— $= h\left(\frac{23}{12} f_{n+1} - \frac{16}{12} f_n + \frac{5}{12} f_{n-1}\right)$



Řád $= k$

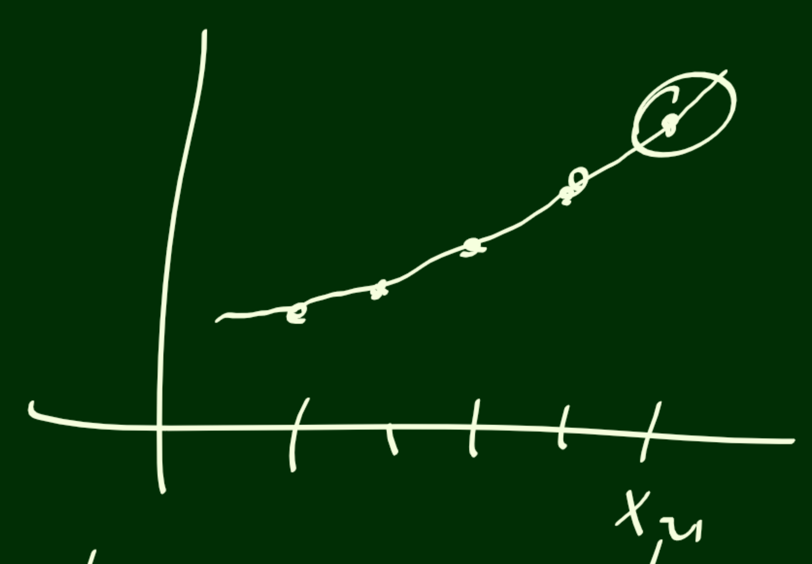
Adams – Moulton – implicitní, jako výše: interpoluji f v $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-k+1}$

Př: $k=1$: $y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n\right)$

Řád $= k+1$

Backward difference formulas: $\underbrace{y'(x_n)}_{} \approx f(x_n, y_n)$

≈ $L'(x_n)$, kde L je Lagrangeův interp. polynom fce y na k předchozích uzlech



implicitní

Def: <u>Lokální diskretizační chyba</u>: $\tau(x,h) := \underbrace{\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{y(x+ih)}_{y_{n+i} \approx y(x_n+ih)}}_{\sim y'} - \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x+ih, y(x+ih))}_{\sim f}$

$x = x_n$

- tj. s jakou chybou splňuje přesné řešení naše schéma

Def: <u>VKM je řádu p</u>, pokud $\exists C, h_0 > 0 : |\tau(x,h)| \leq C h^p$.
$\forall x \in [a,b],\ \forall h \in (0, h_0)$